CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

PROBLEME 1

Nombre chromatique d'un graphe

Avertissement : Dans les questions où un résultat est demandé, le candidat mettra clairement en évidence celui qu'il aura obtenu. Dans les questions où une démonstration est demandée, le candidat s'attachera à produire des démonstrations complètes et aussi concises que possible. A toutes fins utiles, on rappelle que pour prouver l'égalité des cardinaux de deux ensembles, il suffit de construire une bijection entre ces ensembles.

- On note **N** l'ensemble des entiers naturels et **N*** l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
- Pour tout ensemble E, on note $Card\,(E)$ le cardinal de E.
- On rappelle qu'une paire est un ensemble de cardinal 2.
- Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note C_p l'ensemble défini par : $C_p = \{c \in \mathbf{N}^*, c \leq p\}$.
- Pour toute partie E non vide de **N**, on note $\min E$ le plus petit élément de E.
- Pour tout couple d'ensembles (E, F), on note $E - F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F.

Dans tout le problème, on appellera *graphe* tout couple (S, A) où S est un sous-ensemble fini non vide de **N** et A un ensemble de paires d'éléments de S.
Etant donné un graphe $G = (S, A)$, les éléments de S seront appelés les *sommets* du graphe G, et les éléments de A les *arêtes* du graphe G.

Pour tout graphe G, l'ensemble des sommets de G sera noté S_G, ou simplement S s'il n'y a pas d'ambiguïté ; de même, l'ensemble des arêtes de G sera noté A_G, ou simplement A s'il n'y a pas d'ambiguïté. On notera n_G, ou simplement n s'il n'y a pas d'ambiguïté, le nombre de sommets du graphe.

Tournez la page S.V.P.

Dans tout le problème, on considère, à titre d'exemples, les quatre graphes particuliers définis de la façon suivante : pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $G_k = (S_k, A_k)$ où :

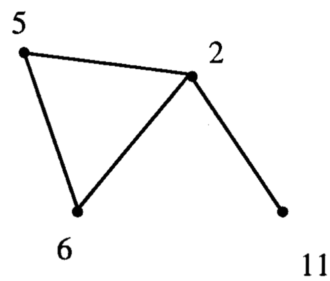
- $S_k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- $A_2 = \{\{4, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- $A_3 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- $A_4 = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$.

1. Une *représentation* d'un graphe G consiste à associer à chaque sommet de G un point du plan et à tracer le segment défini par deux de ces points si et seulement si les sommets auxquels sont associés ces points forment une arête de G. Les points représentant les sommets du graphe doivent être choisis de telle sorte que les segments représentant deux arêtes distinctes quelconques ne puissent se rencontrer en plus d'un point.

Par exemple, le graphe $G = (S, A)$ où

$$S = \{2, 5, 6, 11\} \text{ et } A = \{\{2, 5\}, \{6, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 11\}\}$$

peut être représenté par la figure :



Représenter les graphes G_k $(k \in \{1, 2, 3, 4\})$.
Dans la mesure du possible, on évitera les représentations dans lesquelles deux segments se coupent en un point ne représentant pas un sommet du graphe.

2. On dira que deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\varphi : S \to S'$ telle que

$$\forall (x, y) \in S^2, \{x, y\} \in A \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A'.$$

(Une telle bijection est appelée un *isomorphisme* de G sur G').

2.1. Prouver que les graphes G_1 et G_3 sont isomorphes.

2.2. Pour tout graphe $G = (S, A)$ et tout sommet $s \in S$ de ce graphe, on note $\alpha_G(s)$ (ou simplement $\alpha(s)$ s'il n'y pas d'ambiguïté) le nombre d'arêtes du graphe auxquelles s appartient, et on note $V_G(s)$ (ou simplement $V(s)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble

$$V(s) = \{t \in S, \ \{s,t\} \in A\}.$$

2.2.1. Vérifier que, pour tout graphe $G = (S, A)$ et tout sommet $s \in S$ de ce graphe, on a :

$$\alpha(s) = Card\,(V(s)).$$

2.2.2. Montrer que si $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont deux graphes isomorphes, la propriété suivante est nécessairement vérifiée :

$$\forall s \in S, \quad \alpha_{G'}(\varphi(s)) = \alpha_G(s),$$

où φ désigne un isomorphisme entre G et G'.

2.3. Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

Dans la suite du problème, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ et tout graphe G,
- on appelle "p – coloriage" de G toute application $\psi : S \to C_p$,
- on appelle "bon p – coloriage " de G tout p – coloriage ψ de G tel que :

$$\forall (s, t) \in S^2, \quad \{s, t\} \in A \Rightarrow \psi(s) \neq \psi(t),$$

- on note $B(p, G)$ l'ensemble des bons p – coloriages de G.

De plus, pour tout graphe G, on note f_G l'application de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}$ définie par

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad f_G(p) = Card(B(p, G))$$

et on note $E(G)$ l'ensemble défini par

$$E(G) = \{p \in \mathbf{N}^*, f_G(p) \neq 0\}.$$

3. Soit G un graphe.

3.1. Montrer que $n_G \in E(G)$.

3.2. Prouver que $\forall p \in \mathbf{N}^*, p \in E(G) \Rightarrow p+1 \in E(G)$.

3.3. En déduire l'existence d'un unique entier $\theta_G \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\mathrm{E}(G) = \{p \in \mathbf{N}^*, p \geq \theta_G\}.$$

Le but des questions suivantes est d'étudier le principe d'une méthode visant à déterminer la fonction f_G et le nombre θ_G (appelé *nombre chromatique* de G) pour n'importe quel graphe G.

4. Soit G un graphe.

4.1. On suppose $A_G = \varnothing$. Donner une expression explicite de $f_G(p)$ en fonction de p.

4.2. On suppose $A_G \neq \varnothing$. On note $R(G)$ le sous-ensemble de S_G défini par :

$$R(G) = \bigcup_{a \in A_G} a.$$

On définit deux sommets particuliers de G, notés respectivement $\sigma(G)$ et $\tau(G)$, en posant :

$$\sigma(G) = \min R(G),$$
$$\tau(G) = \min \{t \in S_G, \{\sigma(G), t\} \in A_G\}.$$

4.2.1. Déterminer $\sigma(G_4)$ et $\tau(G_4)$.

On note κ_G l'application de S_G dans S_G définie par

$$\begin{cases} \kappa_G(s) = s \text{ si } s \neq \sigma(G) \\ \kappa_G(\sigma(G)) = \tau(G) \end{cases}$$

et on définit deux nouveaux graphes à partir de G, notés respectivement $\lambda(G)$ et $\mu(G)$, en posant :

$$S_{\lambda(G)} = S_G, \quad A_{\lambda(G)} = A_G - \{\{\sigma(G), \tau(G)\}\},$$
$$S_{\mu(G)} = S_G - \{\sigma(G)\}, \quad A_{\mu(G)} = \{\{\kappa_G(s), \kappa_G(t)\}, \{s,t\} \in A_{\lambda(G)}\}.$$

4.2.2. Déterminer les graphes $\lambda(G_4)$ et $\mu(G_4)$.

4.2.3. Prouver les inégalités strictes

$$\begin{cases} Card\left(A_{\lambda(G)}\right) < Card(A_G) \\ Card\left(A_{\mu(G)}\right) < Card(A_G) \end{cases}$$

4.2.4. Soit $p \in$ **N***.

4.2.4.1. Vérifier que $B(p, G) \cap B(p, \mu(G)) = \varnothing$.

4.2.4.2. Vérifier que $B(p, G) \subset B(p, \lambda(G))$.

4.2.4.3. Pour tout $\psi \in B(p, \mu(G))$, on note $\tilde{\psi}$ le p – coloriage de $\lambda(G)$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(\sigma(G)) = \psi(\tau(G)), \\ \tilde{\psi}(s) = \psi(s) \ \text{ si } \ s \neq \sigma(G). \end{cases}$$

Vérifier que $\tilde{\psi} \in B(p, \lambda(G))$.

4.2.4.4. Etablir une relation entre $Card(B(p,G))$, $Card(B(p, \mu(G)))$ et $Card(B(p, \lambda(G)))$. Dans ce but, on pourra considérer l'application suivante :

$$\left|\begin{array}{l} \gamma : B(p, G) \cup B(p, \mu(G)) \to B(p, \lambda(G)) \\ \qquad\qquad\qquad \psi \mapsto \psi, \text{ si } \psi \in B(p, G) \\ \qquad\qquad\qquad \psi \mapsto \tilde{\psi}, \text{ si } \psi \in B(p, \mu(G)). \end{array}\right.$$

4.2.5. Exprimer la fonction f_G à l'aide des fonctions $f_{\lambda(G)}$ et $f_{\mu(G)}$.

5. Prouver que, pour tout graphe G, f_G est une fonction polynômiale, à coefficients entiers, de degré n_G (on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes).

6. Que peut-on dire des fonctions f_G et $f_{G'}$ si G et G' sont des graphes isomorphes ?

7. Soit $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$.

7.1. Déterminer f_G (on n'indiquera pas le détail des calculs, mais uniquement le résultat, que l'on donnera sous forme factorisée).

7.2. Déterminer le nombre chromatique θ_G de G.

PROBLEME 2

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- On note **N** l'ensemble des entiers naturels.

- On note **C** le corps des nombres complexes, **R** celui des réels.
- Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on note $|z|$ le module de z.

- M_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

- Les éléments de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ seront considérés comme des "matrices colonnes", c'est-à-dire des matrices à n lignes et une seule colonne. Ainsi, pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$ et tout $A \in \mathrm{M}_n$, l'expression AZ désignera un élément de $\mathbf{C}^n$.

- Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n$, et pour tout couple (i, j) d'indices compris entre 1 et n, l'expression $(A)_{ij}$ désigne le coefficient de A d'indice (i, j). Par ailleurs, on écrira simplement $A = (a_{ij})$ pour exprimer que $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{ij} = (A)_{ij}$.

- De même, pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$, et pour tout entier k compris entre 1 et n, l'expression $(Z)_k$ désigne le $k^{\text{ème}}$ coefficient de Z. Et on écrira simplement $Z = (z_k)$ pour exprimer que
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, z_k = (Z)_k.$$

- Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M.

- La matrice identité de M_n est notée I, la matrice nulle simplement 0.

- On dira que ψ est *norme matricielle* si c'est une norme sur l'algèbre M_n, autrement dit si ψ est une norme sur l'espace vectoriel M_n qui vérifie la condition :
$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n^2, \psi(AB) \leq \psi(A).\psi(B).$$

- Pour toute norme N sur $\mathbf{C}^n$, on notera $\tilde{N}$ la norme matricielle associée à N, c'est-à-dire la norme matricielle définie par
$$\forall A \in \mathrm{M}_n, \quad \tilde{N}(A) = \sup_{Z \in C^n - \{0\}} \frac{N(AZ)}{N(Z)}.$$

- Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n$, on note $sp(A)$ le spectre de A, et $\rho(A)$ le nombre défini par :
$$\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in sp(A)\}.$$

- Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbf{C}^n$ par

$$\forall Z = (z_k) \in \mathbf{C}^n, \quad \mathrm{N}_\infty(Z) = \max_{k \in \{1,\dots,n\}} |z_k|.$$

- Tous les espaces vectoriels considérés dans ce problème étant de dimension finie, on dira qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E converge vers un vecteur u de E si la convergence a lieu dans l'espace vectoriel normé obtenu en munissant E d'une norme quelconque.

1.1. Soit N une norme sur $\mathbf{C}^n$.
Montrer que $\forall (A, Z) \in \mathrm{M}_n \times \mathbf{C}^n$, $N(AZ) \leq \tilde{N}(A).N(Z)$.

1.2. Prouver que $\forall A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n$, $\tilde{N}_\infty(A) \leq \max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

1.3. Etablir la formule donnant, pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n$, la valeur de $\tilde{N}_\infty(A)$ en fonction des nombres a_{ij}.

2.1. Soit $Z \in \mathbf{C}^n$, $Z \neq 0$. Montrer que $Z\,{}^tZ$ est un élément non nul de M_n.
2.2. Soit $A \in \mathrm{M}_n$ et ψ une norme matricielle. Montrer que $\rho(A) \leq \psi(A)$.
[on pourra utiliser la question **2.1.**, en considérant un vecteur Z bien choisi].

3. Le but de cette question est de prouver que, pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\tilde{N}(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Soit donc $A \in \mathrm{M}_n$ et $\varepsilon > 0$, quelconques.
Soit $U \in \mathrm{M}_n$ une matrice inversible telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure (le candidat admettra l'existence d'une telle matrice U, quelle que soit la matrice A).
On pose $U^{-1}AU = T = (t_{ij})$.

3.1. Que représente l'ensemble $S = \{t_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ pour la matrice A ?

Pour tout $\delta > 0$, on note D_δ la matrice de M_n définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1,\dots,n\}, \begin{cases} i \neq j \Rightarrow (D_\delta)_{ij} = 0 \\ (D_\delta)_{ii} = \delta^{i-1} \end{cases},$$

et on note V_δ la matrice définie par $V_\delta = UD_\delta$.

3.2. Calculer $V_\delta^{-1} A V_\delta$.

3.3. Montrer qu'il existe un réel $\delta_\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ \sum_{j=i+1}^{n} \left|\delta_\varepsilon{}^{j-i} t_{ij}\right| \leq \varepsilon .$$

Dans la suite, on pose $V = V_{\delta_\varepsilon}$, où δ_ε désigne un réel vérifiant la propriété ci-dessus.

On note ψ l'application de M_n dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathrm{M}_n, \psi(B) = \tilde{N}_\infty\left(V^{-1}BV\right).$$

3.4. Prouver que $\psi(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

3.5. Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\psi = \tilde{N}$.

4. Soit $A \in \mathrm{M}_n$.

4.1. Prouver l'implication $\left(\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}^k = 0\right) \Rightarrow \left(\forall Z \in \mathbf{C}^n,\ \lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}^k Z = 0\right)$.

4.2. Prouver l'implication $\left(\forall Z \in \mathbf{C}^n,\ \lim\limits_{k \to +\infty} A^k Z = 0\right) \Rightarrow \left(\rho(A) < 1\right)$.

4.3. Prouver l'implication

$\left(\rho(A) < 1\right) \Rightarrow$ (il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\tilde{N}(A) < 1$).

4.4. Prouver l'implication

(Il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\tilde{N}(A) < 1$) $\Rightarrow \left(\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0\right)$

5. Soient $\sigma \in \left]0,1\right[$, N une norme sur $\mathbf{C}^n$ et $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ une application σ-lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé $(\mathbf{C}^n, N)$.

5.1. Soit $Z_0 \in \mathbf{C}^n$, un vecteur quelconque. On considère la suite $\left(Z_k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ de premier terme Z_0 et qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \ Z_{k+1} = f\left(Z_k\right).$$

Montrer que la suite $\left(Z_k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est convergente.

5.2. Montrer que f admet un unique point fixe.

6. Soient $W \in \mathbf{C}^n$ et $B \in \mathrm{M}_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(B)$ pour qu'il existe un vecteur $X \in \mathbf{C}^n$ tel que toutes les suites de vecteurs $\left(Z_k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \ Z_{k+1} = BZ_k + W$$

convergent vers X.

7. Soit $A \in \mathrm{M}_n$ une matrice inversible, et soit $Y \in \mathbf{C}^n$.
Soit $M \in \mathrm{M}_n$ une matrice inversible. On note F la matrice M^{-1}, et on pose $Q = M - A$.
On suppose que $\rho(FQ) < 1$.
Utiliser F, Q et Y pour définir une application $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ telle que toute suite $(Z_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad Z_{k+1} = f(Z_k)$$

converge vers l'unique solution du système linéaire $AX = Y$.

L'expression de l'image par f d'un vecteur quelconque $Z \in \mathbf{C}^n$ sera construite à partir des seules matrices F, Q, Y et Z et des seules opérations d'addition (ou de soustraction) et de multiplication matricielles, mais sans faire appel à l'inversion matricielle.

<u>Remarque</u> : en pratique, on prend pour M une matrice facile à inverser, par exemple une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls ; ce qui précède fournit alors (sous réserve que la condition $\rho(FQ) < 1$ soit vérifiée) une méthode numérique de résolution approchée du système linéaire $AX = Y$.

Fin de l'énoncé.